Opakování: Operace s MP:

(i) **Podprostor**: Buď (X,ρ) MP, $Y \subseteq X$.
Pak $(Y,\rho) := (Y, \rho\restriction_{Y\times Y})$ je podprostor.

T16: • $G \subseteq X$ ot. v $(X,\rho) \Rightarrow$
$\Rightarrow G \cap Y$ ot. v (Y,ρ).

• $G' \subseteq Y$ ot. v $(Y,\rho) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, G \subseteq X$ ot. v (X,ρ): $G' = G \cap Y$.

(ii) **Suma MP**: Mějme MP (X_α,ρ_α), $\alpha \in I$,
$\forall \alpha \in I$: $\operatorname{diam} X_\alpha \le 1$. Pak

$$\sum_{\alpha\in I}(X_\alpha,\rho_\alpha) := (X,\rho), \text{ kde}$$

$$X = \{(x,\alpha) : \alpha \in I, x \in X_\alpha\}, \quad \rho((x,\alpha),(y,\beta)) = \begin{cases} \rho_\alpha(x,y), & \text{pokud } \alpha=\beta \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Cvičení: • ρ je metrika.

• $G \subseteq \sum_{\alpha\in I}(X_\alpha,\rho_\alpha)$ je otevřená množina $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \forall \alpha \in I$: $\{x : (x,\alpha) \in G\}$ je otevřená v (X_α,ρ_α).

Pozn: nefungovalo by: $\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$.

(iii) **Součin MP** (spočetně mnoho).

Definice: Buďte (X_i,ρ_i), $i \in \mathbb{N}$ MP, že $\forall i \in \mathbb{N}$: $\operatorname{diam}(X_i) \le 1$. Součin prostorů (X_i,ρ_i) je MP (nutno dokázat!)

$$\prod_{i\in\mathbb{N}}(X_i,\rho_i) := (X,\rho), \text{ kde}$$

$X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ (kartézský součin) a

pro $f,g \in X$, $\rho(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(f(i),g(i))}{2^i}$.

Tvrzení 17: Buďte (X_i, ρ_i), $i \in \mathbb{N}$, MP, $\operatorname{diam} X_i \leq 1$. Nechť $(X, \rho) = \prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \rho_i)$ a buďiž $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ posloupnost bodů v X, $f \in X$. Pak

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ v (X, ρ) $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\forall i \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(i) = f(i)$ v (X_i, ρ_i).

Důkaz: $(\Rightarrow)$ nechť $f_n \to f$. Buďiž dáno libovolné $i_0 \in \mathbb{N}$ (index). Nechť $\varepsilon > 0$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \geq n_0$: $\rho(f_n, f) < \varepsilon \cdot 2^{-i_0}$.

Tedy pro $n \geq n_0$: $\varepsilon \cdot 2^{-i_0} > \rho(f_n, f) =$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \geq \frac{\rho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0))}{2^{i_0}},$$

tj. $\rho_{i_0}(f_n(i_0), f(i_0)) < \varepsilon$.

Tedy $\lim f_n(i_0) = f(i_0)$.

$(\Leftarrow)$ nechť $\forall i \in \mathbb{N}$: $f_n(i) \to f(i)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Najdeme $i_0 \in \mathbb{N}$, že $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, i_0\}$ najdeme n_i, že $\forall n \geq n_i$: $\rho_i(f_n(i), f(i)) < \frac{\varepsilon}{i_0}$.

Položme $\tilde{n} := \max\{n_1, n_2, \dots, n_{i_0}\}$.

Pak $n \geq \tilde{n}$: jest

$$\rho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\rho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{\rho_i(f_n(i), f(i))}{2^i} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\varepsilon / i_0}{2} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \boxtimes$$

TOTÁLNĚ OMEZENÉ & SEPARABILNÍ MP

Definice: Buď (M, d) MP, $A \subseteq M$, $\varepsilon > 0$.
Řekneme, že:

(i) A je *ε-síť* pro M, jestliže

$$\forall x \in M \ \exists a \in A: \ x \in B(a, \varepsilon).$$
$$d(x, a) < \varepsilon.$$

(ii) A je *ε-separovaná*, pokud

$$\forall x, y \in A: \ d(x, y) \geq \varepsilon.$$

(iii) M je *totálně omezený*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \subseteq M: \ A \text{ je konečná } \varepsilon\text{-síť pro } M.$$

(iv) M je *separabilní*, pokud

$\exists A \subseteq M$ spočetná: $\overline{A} = M$.

(Tj. A je *hustá* v M.)

Příklad: $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$. $\boxed{\mathbb{R} \text{ je tedy separabilní}}$

Pak $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$: nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolný bod. Tvrdím, že $d(x, \mathbb{Q}) = 0$

(tj. $x \in \overline{\mathbb{Q}}$): najdi $\{q_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $q_n \to x$.

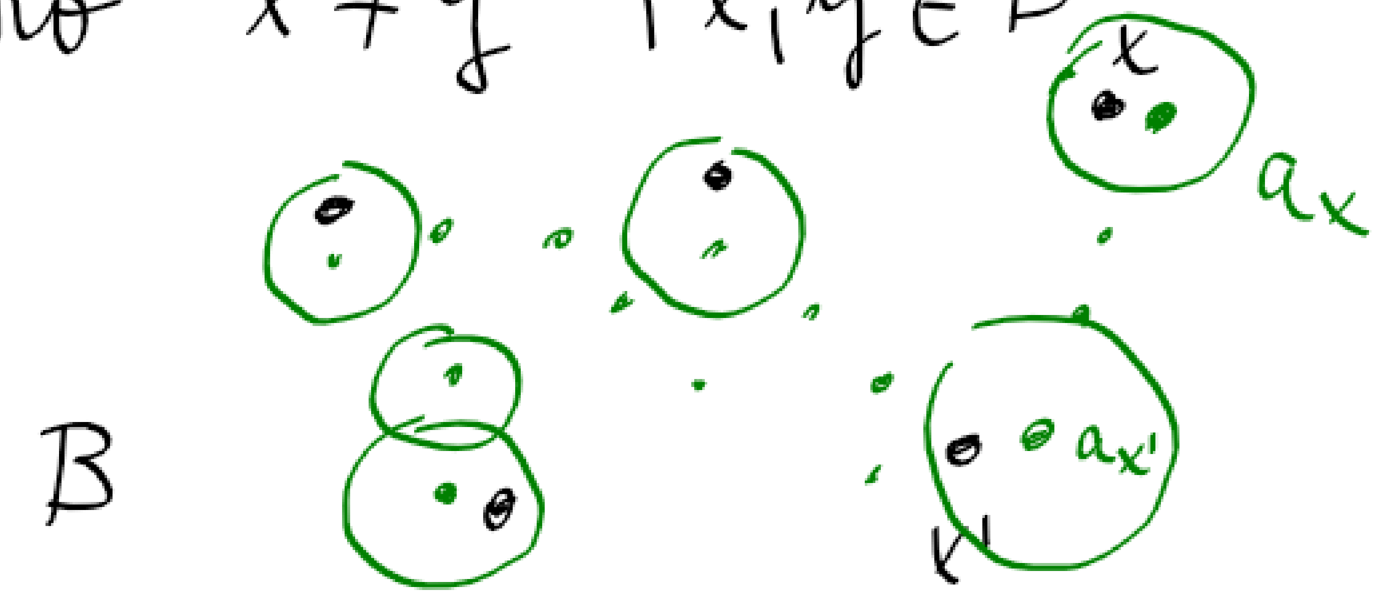
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial\mathbb{Q}$. Stačí tedy ukázat, že libovolné $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ splňuje $x \in \partial\mathbb{Q}$.

Tj. pro $\varepsilon > 0$ lib. $B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \ \wedge$
$$\wedge \ B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

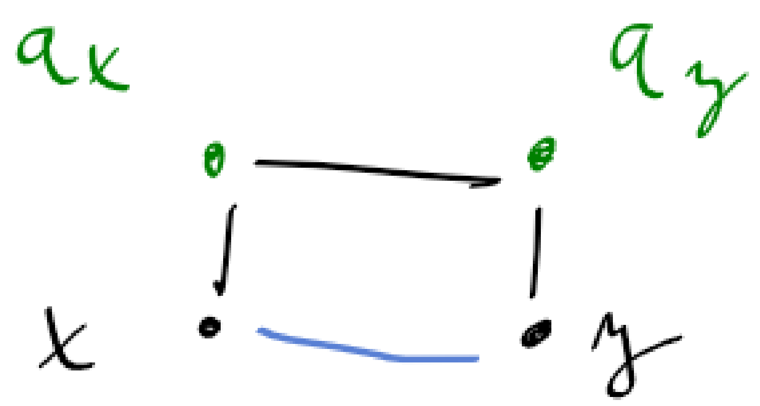
Platí, neb libovolný int. obsahuje rac. i irac. čísla.

Věta 18: MP (M,d) je totálně omezený, právě když $\forall \varepsilon>0$ je každá ε-sep. mn. konečná.

Důkaz: ($\Rightarrow$) nechť $\varepsilon>0$, $B\subseteq M$ je ε-sep.
Chceme: B je konečná. Protože M je TO, existuje konečná $\frac{\varepsilon}{4}$-síť $A\subseteq M$.
Pro každé $x\in B$ zvolíme nějaký bod $a_x\in A$: $d(x,a_x)<\frac{\varepsilon}{4}$. Pak pro $x\neq y$, $x,y\in B$ platí $a_x\neq a_y$:



$$d(a_x,a_y)\geq d(x,y)-d(x,a_x)-d(y,a_y)\geq$$
$$\geq \varepsilon-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}>0.$$



Tj. zobrazení $B\to A$: $x\longmapsto a_x$ je prosté. Ale A je konečná. Tedy ($B\precsim A$, tj.) B je konečná.

($\Leftarrow$) nechť $\varepsilon>0$; chceme najít koneč. ε-síť. Vezmeme si $B\subseteq M$ ε-separovanou která je maximální (Tj. každý nový prvek ně poruší ε-sep. množiny)
Tvrdím, že B je automaticky ε-síť.
Zvolme $x\in M$. Pak existuje $b\in B$: $d(x,b)<\varepsilon$. [Kdyby ne: $\forall b\in B$: $d(x,b)\geq\varepsilon$.
To by znamenalo $B\cup\{x\}\supsetneq B$ je ε-sep, což je spor s maximalitou B.] Tj.
B je opravdu ε-síť pro M. ∎

Důkaz existence max. ε-separované mn.:

<u>Zornovo lemma</u>: (princip maximality)

nechť $(P, \leq)$ je neprázdná uspořádaná množina splňující, že každý řetězec $R \subseteq P$ má majorantu (tj. horní závoru) v P.

lineárně usp. podmnožina

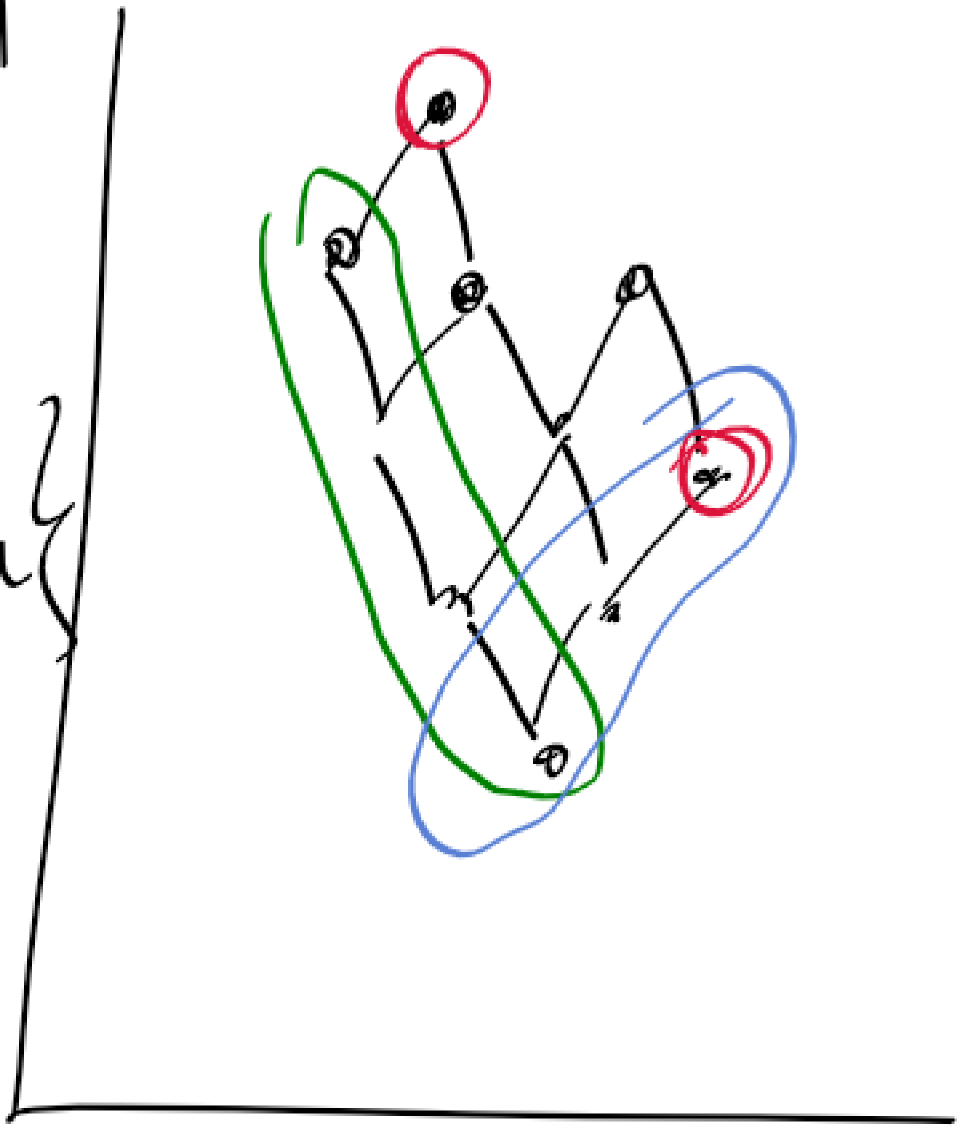
Pak existuje maximální prvek v P.

Pro nás

$P = \{B \subseteq M : B \text{ je } \varepsilon\text{-separovaná}\}$

$(P, \subseteq)$, tj.

$B \subseteq B'$ má běžný význam.



nechť $\mathcal{F} \subseteq P$ je řetězec.

Pak: • $\bigcup \mathcal{F}$ je horní závora $\mathcal{F}$

• $\bigcup \mathcal{F} \in P$

Skutečně $\forall B \in \mathcal{F}: \; B \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ ✓

<u>Pak</u>: $\bigcup \mathcal{F}$ je ε-separovaná:

[Zvolme $x, y \in \bigcup \mathcal{F}$. Pak

$\exists$ $B_x \in \mathcal{F}$, $B_y \in \mathcal{F}$: $x \in B_x$, $y \in B_y$.

Ale $\mathcal{F}$ je řetězec, takže $B_x \subseteq B_y \vee B_y \subseteq B_x$

BÚNO $B_x \subseteq B_y$. Pak $x, y \in B_y \in P$

$\Rightarrow d(x,y) \geq \varepsilon$.] $\bigcup \mathcal{F} \in P$ (je ε-sep.)

Tedy existuje max. prvek $B \in P$, a jsme hotovi. ⊠